ＥＡ　解析学・位相序説　　講義報告[3]

２００８年2月２４日（日）　１４：３０－１７：３０

領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 内にコンパクトしぼり出し列と呼ばれるコンパクト集合列 $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ をつくり、各 K_m 上の $\sup -$ ノルムを同時に連続にする最弱な位相について調べ、その位相が Ω 上のコンパクト一様収束位相と一致することを示した。最後に次回の準備として線形位相空間と局所凸空間の定義を行なった。

2　連続写像の空間

補題 2.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域（連結開集合）とする。

$$K_m = \left\{ x \in \Omega \mid \|x\| \leq m, \rho_{\partial\Omega}(x) \geq \frac{1}{m} \right\} \quad \text{ただし、} \rho_{\partial\Omega}(x) = \min\{\|x-y\| \mid y \in \partial\Omega\}$$

とおくとき、

1. $m_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、$m \geq m_0$ なるすべての m に対して、K_m はコンパクト。
2. $K_{m_0} \subset K^\circ_{m_0+1} \subset K_{m_0+1} \cdots K_m \subset K^\circ_{m+1} \subset K_{m+1} \cdots \ (m \geq m_0)$ でかつ、
$$\bigcup_{m \geq m_0} K_m = \Omega$$
が成立する。
3. 任意の Ω のコンパクト集合 K に対して、$K \subset K_{m_K}$ を満たす $m_K \in \mathbb{N}$ が存在する。

補題 2.2. K を領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とする。

$$\eta_K(f) = \sup\{|f(x)| \mid x \in K\} \quad for\ \forall f \in C(\Omega, \mathbb{K})$$

とおくとき、

1. $\eta_K : C(\Omega, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ はセミノルムである。
2. $C(\Omega, \mathbb{K})$ には、$(\eta_K)_{K \in \mathfrak{K}(\Omega)}$ によりコンパクト一様収束位相が入る。ただし、$\mathfrak{K}(\Omega)$ は Ω 上のコンパクト集合全体とする。
3. Ω のしぼり出し $(K_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ に対して、
$$d(f,g) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{\eta_{K_\nu}(f-g)}{1+\eta_{K_\nu}(f-g)}$$
とおくと、$(C(\Omega, \mathbb{K}), d)$ は距離空間になる。

定理 2.1. $\Phi = \{\eta_K \mid K \in \mathfrak{K}(\Omega)\}$ による一様収束位相と $\Theta = \{\eta_{K_m} \mid m \in \mathbb{N}\}$ による一様収束位相が一致することを示せ。ただし、$\{\eta_{K_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ はコンパクトしぼり出しとする。

[3]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

3　局所凸線型空間

定義 3.1 (位相線型空間). $\mathbb{K}$ 上の線型空間 E で、

$$\begin{aligned} &\text{加法} \quad a : E \times E \to E, \quad a(v, w) = v + w \\ &\text{スカラー倍} \quad s : \mathbb{K} \times E \to E, \quad s(\lambda, v) = \lambda v \end{aligned}$$

が連続になるような位相をもつとき、E を $\boldsymbol{T.V.S}$ **（位相線型空間）**という。

注）T.V.S では、平行移動は位相（自己）同型だから原点の基本近傍系を考えればよい。

定義 3.2 (局所凸線型空間). E を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とするとき、E 上のセミノルム族 $\eta = (\eta_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ で定まる始位相 $\mathfrak{D}_\eta(E)$ を E 上のひとつの**局所凸位相**という。

記録　J.S